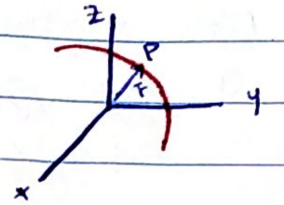
8/10/19

"Εισαγωγή στη Μαθηματική Φυσική"

Κλασική Μηχανική



$$\bar r \to \frac{d\bar r}{dt} = u \to \frac{d^2\bar r}{dt^2} = \bar a$$

1) Υ.Σ. έχει ένα χαρακτ. μέγεθος m
2) Δεν περιστρ. γύρω από τον εαυτό του
3) Μικρές ταχύτητες $\bar u \ll c$ (ταχ. φωτός)
4) Ο χρόνος, t, είναι απόλυτος

Χρόνος:

1) Δεν εξαρτάται απ' τον χώρο $\cancel{t = t(\bar r)}$
2) Κυλάει γραμμικά κ. με τον ίδιο τρόπο $\forall \bar r$ του $D \subseteq \mathbb{R}^3$

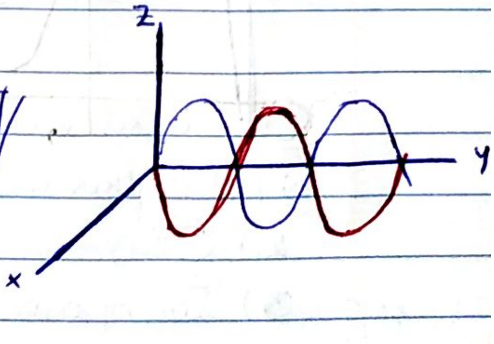
- x, t (ακίνητο)
- x', t' (κινούμενο)

αρχική θέση

$$\begin{cases} x' = x + ut & \text{(ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ)} \\ t' = t & \text{(αφού κυλάει με τον ίδιο τρόπο)} \end{cases}$$

μετασχημ. Γαλιλαίου

Maxwell: Εισάγει τις ΜΔΕ που συνδέουν τις Ηλεκτρικές κ. Μαγνητικές δυνάμεις



Δυνάμεις
1) Βαρυτικές
2) Ηλεκτρομαγνητικές
3) Πυρηνικές
   - Ασθενείς
   - Ισχυρές

Lorentz, 1904:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot(x+ut) \\[2em] t' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\left(\dfrac{ux}{c^2}+t\right) \end{cases}$$

(Νέα μαθηματική θεώρηση για το σύμπαν)

Έτσι περιγράφουμε την κίνηση ενός Υ.Σ. με ταχύτητα κοντά στην ταχύτητα του φωτός, $u \to c$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ από μετασχ. Lorentz:

1) Ο χρόνος δεν είναι απόλυτος αλλά είναι σχετικός!

Βιβλίο: Μαθημ. Μέθοδοι Φυσικής, Βεργάδος
Σελίδα: mp
Ασκήσεις, Θέματα
313δ, mxenos@uoi.gr

Θα ασχοληθούμε με:

1) Διανυσματικούς χώρους
2) Θεωρία Τελεστών
3) Συστήματα Sturm-Liouville (ΣΔΕ 2ης τάξης, Π.Σ.Τ.)
4) Ειδικές συν/σεις
   - → Γάμμα - Βήτα
   - → Ορθογώνια πολ/μα, Legendre, Hermite
   - → συν/σεις Bessel
   - → Fourier
5) Εφαρμογές Μαθημ. Φυσικής

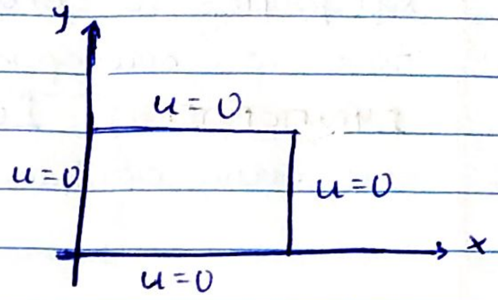
$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i(x)$ Fourier

ΜΔΕ

Laplace: $\bar{\nabla}^2 u = 0$

$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$ Διάχυση όταν $t \to \infty$

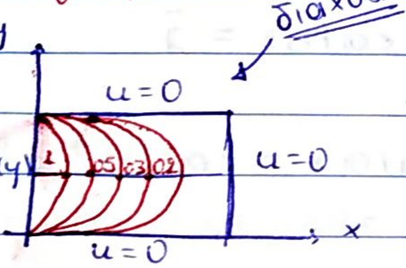
$u = u(x,y)$, $u \in D \subseteq \mathbb{R}^2$

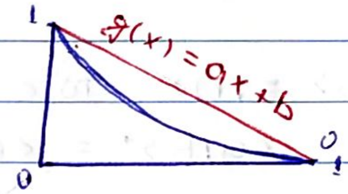


$[0,1] \times [0,1]$

Τότε η λύση $u = u(x,y) = 0$

ΜΔΕ, 2ης τάξης, 1ου β., γραμμ., ομογ.





$u = u(x,y)$

$u = A(x)B(y)$

$\downarrow$

Σύστημα 2 ΣΔΕ

Διαν/κοί χώροι

Συμβολίζουμε $\bar{a} = |a\rangle$

Βασικές ιδιότητες δ.χ. S

1) Κλειστός ως προς την πρόσθεση

$|a\rangle, |b\rangle \in S$ τότε $|a\rangle + |b\rangle \in S$

2) Κλειστός ως προς τον πολ/σμό με αριθμό

$|a\rangle \in S$, $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $\lambda \cdot |a\rangle \in S$

3) (...)

Εσωτερικό γινόμενο:
Ορίζουμε το bra $\langle b|$ κ' το ket $|a\rangle$,
τότε το εσωτερικό γινόμενο $\langle b|a\rangle$ braket
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Συνδέουμε δύο διαν/τα $\langle b|$, $|a\rangle$
με έναν αριθμό (εν γένει μιγαδικό)
$\langle b|a\rangle$

Ιδιότητες:

1) $\underbrace{\langle b|a\rangle}_{\lambda\in\mathbb{C}} = \underbrace{\langle a|b\rangle^*}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ $\quad \langle a|b\rangle = \bar{\lambda}$

- $|b\rangle \equiv |a\rangle$ τότε $\langle a|a\rangle = \langle a|a\rangle^* \in \mathbb{R}$
- Αν $\langle a|b\rangle^* = \langle a|b\rangle$ τότε τα εσωτερικά γινόμενα λέγονται συμμετρικά

2) Αν $|c\rangle = \lambda\cdot|a\rangle + \kappa\cdot|b\rangle$
$$\langle d|c\rangle = \lambda\cdot\langle d|a\rangle + \kappa\cdot\langle d|b\rangle$$

3) $\langle a|a\rangle \geq 0$, για την ισότητα όταν
$$|a\rangle = 0 = |0\rangle$$

4) $\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$

5) Δύο διαν/τα είναι ορθογώνια
$$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle = 0$$

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ}}$: Το σύνολο των συνεχών συν/σεων $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, συγκροτεί έναν δ.χ.

ΑΠ.:

1) $f(x), g(x) \in S \Rightarrow f(x)+g(x) \in S$
2) $f(x)$ συνεχής, $\lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow \lambda f(x) \in S$
3) Το μοναδιαίο στοιχείο είναι η μηδενική συν/ση
4) Αν $f(x)$ συνεχής στο $[a,b]$, τότε $\exists\, g(x) = -f(x)$ ε.ω.
$$f(x)+g(x) = f(x)-f(x) = 0$$

→

5) Εσωτερικό γινόμενο : $g(x)$, $f(x)$

$$\langle g | f \rangle = \int_a^b g^*(x) f(x)\, dx = \int_a^b g(x) f(x)\, dx$$

π.χ. $\rightarrow$ $f(z) = f_1(z) + i f_2(z)$

$\bar{f}(z) = f_1(z) - i f_2(z)$

$$\langle g | f \rangle = \langle f | g \rangle^*$$

$$\langle g | f \rangle = \int_a^b g^*(x) f(x)\, dx = \int_a^b \left(f^*(x) g(x)\right)^* dx$$

$$= \langle f | g \rangle^*$$